

# Epästationaariset aikasarjat ja yksikköjuuritestit

George Lapinlampi

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

16.11.2014



Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen		Laitos/Institution– Department Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä/Författare – Author George Lapinlampi			
Työn nimi / Arbetets titel – Title Epästationaariset aikasarjat ja yksikköjuuritestit			
Oppiaine /Läroämne – Subject Tilastotiede			
Työn laji/Arbetets art – Level Kandidaatin tutkielma		Aika/Datum – Month and year Joulukuu 2014	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages 30
Tiivistelmä/Referat – Abstract			
<p>Tässä työssä tutkin epästationaaristen aikasarjojen ominaisuuksia ja tapoja paljastaa yksikköjuuren niissä yksikköjuuritestien avulla. Kirjoitelman ydinkäsitteet painottuvat vahvasti aikasarjateoriaan, joten aluksi esittelen aikasarjojen mallintamisen olennaisia esitietoja, kuten ARIMA-mallien perusominaisuudet ja havaintojen suhteita ja ennusteita mittaavat käsitteet, sekä perusteoriaa epästationaaristen ja stationaaristen aikasarjojen prosesseista. Sisällytän epästationaaristen aikasarjojen teoreettiseen osioon myös deterministisen trenditekijän prosessin ja yksikköjuuriprosessin esitietoja korostaakseen taustamallien merkitystä epästationaarisia aikasarjoja analysoidessa. Teoriajakson lopuksi täydennän prosessien vertailua parilla yksinkertaisella esimerkillä.</p> <p>Työn ytimen muodostavat kaksi yksikköjuuritestistä. Toinen on vuonna 1979 julkaistu Dickey-Fullerin (laajennettu) testi (ADF-testi) ja toinen on vuonna 1996 julkaistu Elliott-Rothenberg-Stockin testi (DF-GLS-testi). Esitän lyhyesti kummankin yksikköjuuritestin teorian, johon sisältyy regression algebralliset muunnokset t-testin hypoteesin testaamista varten sekä t-testin ja sen jakauman joitain asymptoottisia ominaisuuksia. Lisäksi DF-GLS-testin tapauksessa esitän testin olennaisimpia teoreettisia ominaisuuksia, jotka parantavat sen voimaa suhteessa ADF-testiin ja joista tärkein on trendin poistaminen ennen varsinaista t-testiä.</p> <p>Empiirisen osion ensimmäisessä osassa suoritan aluksi yksikköjuuritestejä kahdelle finanssiaikasarjalle, Ison-Britannian vuosien 1988–2013 inflaatiolle ja vuosien 1979–2001 Ison-Britannian punnan vaihtokurssin kuukauden korolle suhteessa USA:n dollariin. Nämä rakenteeltaan erilaiset aikasarjat tarjoavat hyvän esimerkin siitä miksi viipeiden valinta on tärkeä yksikköjuuritestauksessa ja lisäksi ne osoittavat, että pelkästään aikasarjojen graafisen tarkastelun perusteella tekemät oletukset saattavat johtaa harhaan. Niinpä korostan, että viipeiden valitsemisen pitäisi aina perustua teoriaan tai harkittuun analyysiin. Saatujen yksikköjuuritestiarvojen perusteella ei kuitenkaan voida sanoa, että kumpikaan testi olisi toistaan parempi näissä tapauksissa, joskin DF-GLS-testi kallistuu enemmän yksikköjuuren suuntaan viipeitä lisätessä.</p> <p>Empiirisen osion toisessa osassa suoritan yksikköjuuritestejä kuudelle simuloitulle aikasarjalle. Simuloituja aikasarjoja on kuusi kappaletta ja ne ovat havaintomääriltään 25, 100 ja 1000 havaintoa pitkiä, joista joka toiseen sisällytän yksikköjuuren ja deterministisen trenditekijän ja joka toiseen vain deterministisen trenditekijän. Tulosten perusteella ei voi sanoa, että DF-GLS-testi olisi ylivoimainen ADF-testiin verrattuna, sillä ADF-testi onnistuu esimerkiksi hylkäämään yksikköjuuren vahvemmin luvuin joissain tapauksissa. Kaikissa kuudessa tapauksessa kumpikin testi hyväksyy tai hylkää nollahypoteesin täysin oikein. Korostan kuitenkin, että testien asetuksilla, kuten trendin sisällyttämisellä, on iso rooli. Edellä olevissa tapauksissa katsoin tarpeelliseksi sisällyttää trenditekijän testiregressioon, sillä tiesin muutenkin sen olevan mukana prosessien määrittelyn perusteella, mikä ei aina ole valitettavasti tiedossa reaali maailman aikasarjojen kohdalla.</p> <p>Kirjoitelman tärkein tulos on, että saamastaan kriitistä huolimatta ADF-testi toimii hyvin säännöllisesti käyttäytyvissä aikasarjoissa ja myöskään reaali maailman aikasarjojen kohdalla ei ole havaittavissa suurta eroa teoriassa voimakkaampaan DF-GLS-testiin. Testien perusteellisempi vertailu vaatisi kuitenkin syvällisempiä menetelmiä, kuten Monte Carlo -simulaatio esimerkiksi.</p>			
Avainsanat – Nyckelord – Keywords yksikköjuuri, aikasarja			

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Epästationaariset prosessit</b>	<b>4</b>
2.1	Esitiedot . . . . .	4
2.2	Trendistationaariset prosessit . . . . .	6
2.3	Yksikköjuuriprosessit . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Yksikköjuuritestit</b>	<b>13</b>
3.1	Dickey-Fullerin ja laajennettu Dickey-Fullerin testi . . . . .	14
3.2	Elliott-Rothenberg-Stockin testi . . . . .	16
3.3	ADF-testin ja ERS-testin empiirinen vertailu . . . . .	18
3.3.1	Yksikköjuuritestit ja simuloidut aikasarjat . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Johtopäätökset</b>	<b>20</b>

# Luku 1

## Johdanto

Aikasarja on ajassa tapahtuvaa tietyn ilmiön arvojen muutosta. Joidenkin aikasarjojen saamat arvot vaihtelevat pitkälläkin aikavälillä tietyn arvon lähellä ja niiden prosessien ottamat arvot voivat olla havaintoja jostain ilmiöstä, joka noudattaa jotain asymptoottista jakaumaa. Toisaalta useilla tilastollisilla aikasarjoilla on trendimäistä käytöstä. Vaikka ne saattavat vaihdella huomattavasti periodeittain, pitkässä juoksussa niiden saamat arvot joko kasvavat tai vähenevät järjestelmällisesti. Hyvä esimerkki tällaisista aikasarjoista on kansantalouden ja finanssiaikasarjat, mutta esimerkiksi myös jotkut meteorologiaan liittyvät aikasarjat. Aikasarjan trendimäisyys on usein paljastettavissa graafisen tarkastelun avulla, kun havainnot ovat riittävän pitkältä aikaväliltä. Tämä ei kuitenkaan ole aina mahdollista, jos havaintoja ei ole riittävästi. Kuitenkin jos aikasarjan trendimäisyys on ilmeistä niin se sisältää kiehtovia ominaisuuksia, joiden takia aikasarjan luova prosessi on kiinnostava tutkimuskohde. Myöhemmin kuitenkin nähdään, että joillakin ei-trendimäisillä aikasarjoilla saattaa olla samanlaisia ominaisuuksia kuin trendimäisillä.

Trendimäisen eli epästationaarisen käytöksen aiheuttavia prosesseja voidaan jakaa usempaan tyyppiin, mutta työssäni tutkin kolmea niistä. Ensimmäinen niistä on deterministisen trenditekijän sisältävä prosessi, jossa shokeilla ja innovaatioilla on vain väliaikainen vaikutus. Näin ollen, jos epästationaarisen sarjan käytös perustuu deterministiseen trenditekijään sen arvo saattaa nousta tai laskea huomattavasti lyhyellä aikavälillä, mutta se kuitenkin palautuu sen jälkeen lähelle deterministista uraa kehittyen edelleen pitkin sitä. Toiseen tyyppiin kuuluvat prosessit, jotka perustuvat stokastiseen trendiin eli yksikköjuureen. Tämän tyyppin aikasarjoilla shokkien vaikutus on pitkällä aikavälillä pysyvää, yksittäinen shokki voi joko nostaa ja laskea sarjan trendiä ja sen kehitys jatkuu pitkin sitä kunnes jokin muu mahdollinen shokki tulevaisuudessa taas muuttaa sen trendiä. Usein epästationaaristen aikasarjojen mallit perustuvat kuitenkin edellä mainittujen tyyppien symbioosiin eli prosesseihin, jotka sisältävät sekä trenditekijän, että yksikköjuuren.

On olemassa monia käytännön ja teorian kannalta tärkeitä syitä tutkia perustuuko

aikasarjan käytös enemmän deterministiseen trenditekijään vai yksikköjuureen. Ehkäpä olennaisimmat syyt tieteellisen kiehtovuuden lisäksi ovat aikasarjan tulevaisuuden arvojen ja volatilitiitin ennustaminen, sekä yhteisintegroituvuuden testaaminen. Myös asymp-toottiset ominaisuudet, kuten suurten lukujen laki ja keskeinen raja-arvolause riippuvat aikasarjan luonteesta. Yksikköjuuriprosessin tapauksessa monet asymp-toottiset jakaumat eivät enää päde samalla tavalla kuin deterministisen trendin tapauksessa.

Tässä työssä aion tutkia epästationaaristen aikasarjojen ominaisuuksia ja myös tapoja paljastaa yksikköjuuren läsnäolon eli yksikköjuuritestejä. Etenen seuraavasti, esittelen perusteoriaa epästationaaristen aikasarjojen prosesseista ja esitän deterministisen trenditekijän prosessin ja yksikköjuuriprosessin eroja muutaman empiirisen esimerkin kautta. Lopuksi esittelen kaksi yleisesti käytettyä yksikköjuuritestistä ja mainitsen tekijöitä, joiden perusteella jotkut testit ovat parempia kuin toiset. Empiiriset esimerkit painottuvat lukuun 3, jonka kuvat ja taulukot löytyvät liiteluvusta. Lisäksi koska yksikköjuuritesteissä tapahtuu edelleen mielenkiintoista tutkimusta ja edistystä, yritän valaista lukijalle yleisellä tasolla sitä, mitä kannattaa odottaa tulevaisuudessa tältä kyseiseltä tilastotieteen osa-alueelta.

# Luku 2

## Epästationaariset prosessit

### 2.1 Esitiedot

Käytän työssäni aikasarjateorian vakiintunutta terminologiaa, mutta sen takia että moni asia tässä työssä menee kandidaatin tason opintojen edelle metodien suhteen, määrittelyn tässä alaluvussa muutamat kirjoitelman ymmärtämisen kannalta olennaiset asiat välttääkseen hämmennystä varsinkin alaan perehtymättömässä lukijassa.

**Viiveoperaattori.**  $L$  on viiveoperaattori, jolle pätee:  $Ly_t \equiv y_{t-1}$ , jossa alaindeksi ilmaisee ajanhetkeä.

**Autokovarianssi.** Aikasarjan autokovarianssi määritellään

$$\gamma_{jt} = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] ,$$

jossa  $\mu$  on aikasarjan odotusarvo.

**Autokorrelaatio.** Aikasarjan autokorrelaatio ajanhetken  $t$  ja  $s$  havaintojen välillä määritellään

$$R(t, s) = \frac{E[(y_t - \mu_t)(y_s - \mu_s)]}{\sigma_t \sigma_s} ,$$

jossa  $\sigma_t$  ja  $\sigma_s$  ovat havaintojen keskihajonnat.

**Valkoinen kohina.** Prosessi  $\{\varepsilon_t\}$  on valkoinen kohina, jos  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T\}$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita muuttujia, joille pätee  $E(\varepsilon_t) = 0$  ja  $var(\varepsilon_t) < \infty$  kaikilla  $t$ .

**Liukuvan keskiarvon prosessi.**  $MA(q)$  prosessi on liukuvan keskiarvon prosessi indeksillä  $q$

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} ,$$

jossa  $\varepsilon_t$  on valkoinen kohina,  $\mu$  on vakio ja  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$  ovat reaalitykkuja.  $MA(\infty)$  puolestaan määritellään

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} = \mu + \theta(L) \varepsilon_t,$$

jossa  $(\theta_1, \theta_2, \dots)$  ovat mitä tahansa reaalitykkuja. Oletan aina, että  $\sum_{j=0}^{\infty} |\theta_j| < \infty$ .

**Autoregressiivinen prosessi.**  $AR(p)$  on autoregressiivinen prosessi parametrilla  $p$  ja sille pätee

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

jossa  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  ovat reaalitykkuja.

**Autoregressiivinen liukuvan keskiarvon prosessi.**  $ARMA(p, q)$  on prosessi parametreilla  $p$  ja  $q$ , jolle pätee

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

tai viiveoperaattorin muodossa:

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p) y_t = c + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t.$$

**Aikasarjan arvojen ennustusestimaattori.** Merkitään aikasarjan ennustusestimaattoria  $\hat{y}_{t+s|t}$ . Se perustuu ajanhetkellä  $t$  olevaan tietoon ja se ulottuu  $s$  periodia eteenpäin.

**Impulssivaste.** Impulssivasteella mitataan aikasarjan arvojen muutosta shokkien vaikutuksesta:  $\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t}$ , jossa  $\varepsilon_t$  on valkoinen kohina.

**Wienerin prosessi.** Wienerin prosessi tai Brownin liike on stokastinen prosessi, joka liittyy jokaisen ajankohdan  $t \in [0, 1]$  skalaarivektoriin  $W(t)$  siten, että seuraavat ehdot pätevät:

1.  $W(0) = 0$ ;
2. Jokaisena ajankohtana  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$  erotukset  $[W(t_2) - W(t_1)]$ ,  $[W(t_3) - W(t_2)]$ ,  $\dots$ ,  $[W(t_k) - W(t_{k-1})]$  ovat riippumattomia satunnaismuuttujavektoreita, jolle  $[W(s) - W(t)] \sim N(0, s - t)$ ;
3. Jokainen toteutunut arvo  $W(t)$  on kaikkialla jatkuva todennäköisyydellä 1.

## 2.2 Trendistationaariset prosessit

**Määritelmä 1.** Aikasarjaprosessi  $y_t$  on (heikosti) stationaarinen, jos sille pätee:

1.  $E(y_t^2) < \infty$  kaikilla  $t$
2.  $E(y_t) = \mu$  kaikilla  $t$
3.  $E[(y_s - \mu)(y_t - \mu)] = E[(y_{s+h} - \mu)(y_{t+h} - \mu)]$  kaikilla  $s, t$  ja  $h$

Stationaarisen prosessin voidaan esittää myös seuraavasti

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \mu + \psi(L) \varepsilon_t,$$

jossa  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  ja yhtälön  $\psi(z) = 0$  juuret ovat yksikköympyrän ulkopuolella, toisin sanoen jos  $|z| = 1$ , niin  $1 - \psi_1 z - \psi_2 z^2 - \dots \neq 0$ . Prosessi  $\{\varepsilon_t\}$  on tässä valkoinen kohina.

**Määritelmä 2.** Aikasarjaprosessi  $y_t$  on (vahvasti) stationaarinen, jos sen yhteistodennäköisyysjakauma on aikainvariantti eli se säilyy samana koko havaintohistorian ajan.

**Määritelmä 3.** Aikasarjaprosessi on trendistationaarinen, jos se voidaan esittää

$$y_t = \alpha + \delta t + u_t,$$

jossa  $\{u_t\}$  on stationaarinen prosessi ja sille pätee  $E(u_t) = 0$  kaikilla  $t$ . Kyseisen aikasarjan odotusarvolle pätee  $E(y_t) = \alpha + \delta t$ , jossa  $\delta t$  on ajasta riippuva deterministinen trenditekijä ja  $\alpha$  on vakiokerroin.

Trendistationaarisen aikasarjan ennustaminen on melko suoraviivaista. Kun prosessin malliin lisätään deterministinen komponentti  $(\alpha + \delta t)$  saadaan  $s$  periodia eteenpäin ennustavan arvon

$$\hat{y}_{t+s|t} = \alpha + \delta(t+s) + \psi_s \varepsilon_t + \psi_{s+1} \varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \varepsilon_{t-2} + \dots$$

Kun oletetaan, että  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ , niin trendistationaarisen aikasarjan ennustus lähestyy trenditekijää seuraavasti

$$E[\hat{y}_{t+s|t} - \alpha - \delta(t+s)]^2 \rightarrow 0, \text{ kun } s \rightarrow \infty.$$



Trendistationaarisen aikasarjan  $s$  periodin pituinen ennustusvirhe on

$$\begin{aligned} y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t} &= \alpha + \delta(t+s) + \varepsilon_{t+s} + \psi_1 \varepsilon_{t+s-1} + \psi_2 \varepsilon_{t+s-2} + \cdots \\ &\quad + \psi_{s-1} \varepsilon_{t+1} + \psi_s \varepsilon_t + \psi_{s+1} \varepsilon_{t-1} + \cdots \} \\ &\quad - \{ \alpha + \delta(t+s) + \psi_s \varepsilon_t + \psi_{s+1} \varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \varepsilon_{t-2} + \cdots \} \\ &= \varepsilon_{t+s} + \psi_1 \varepsilon_{t+s-1} + \psi_2 \varepsilon_{t+s-2} + \cdots + \psi_{s-1} \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

ja keskineliövirhe on

$$E[y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t}]^2 = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots + \psi_{s-1}^2) \sigma^2,$$

koska termit  $\varepsilon_t$  ovat riippumattomia.

Ennustusperiodin kasvaessa ennustuksen epävarmuudella ei ole enää merkitystä, sillä keskineliövirhe silloin lähestyy vakiota:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E[y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t}]^2 = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots) \sigma^2 = \text{var}(\psi(L) \varepsilon_t).$$

Trendistationaarisen prosessin impulssivaste voidaan ilmaista reaaliarvoisella luvulla, joka riippuu periodista  $s$ :

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = \psi_s,$$

ja lisäksi  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = 0$ .

## 2.3 Yksikköjuuriprosessit

**Määritelmä 4.** Aikasarjaprosessi on yksikköjuuriprosessi, jos sille pätee

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - L) y_t = \delta + \psi(L) \varepsilon_t,$$

jossa  $(1 - L)$  on sama kuin differenssioperaattori  $\Delta$ ,  $\delta$  on trendivakio (joskus yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan  $\delta = 0$ ). Yksikköjuuriprosessi siis muuttuu stationaariseksi ensimmäisen differenssin jälkeen.

Yksikköjuuriprosessi on siis satunnaiskulkuprosessi, joka saadaan muodostettua asetamalla  $\psi(L) = 1$ :

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = (y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j}$$

ja trendin kanssa

$$y_t = y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t = (y_{t-2} + \delta + \varepsilon_{t-1}) + \delta + \varepsilon_t = y_0 + \delta t + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j},$$

jossa  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ .

Satunnaiskulku ei ole stationaarinen prosessi, koska sen varianssi kasvaa havaintomäärien kasvaessa ja sille pätee  $\text{var}(y_t) = t\sigma^2$ . Sen ensimmäinen differenssi on kuitenkin stationaarinen:  $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \delta + \varepsilon_t$ , joten  $\text{var}(\Delta y_t) = \sigma^2$ .

Trendistationaarinen prosessi on myös mahdollista esittää yksikköjuuriprosessin muodossa. Asetetaan

$$y_t = \alpha + \delta t + u_t, \quad (5)$$

jossa  $u_t$  on stationaarinen  $ARMA(p, q)$  prosessi odotusarvolla nolla. Tällöin pätee:

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p) u_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t, \quad (6)$$

jossa  $MA(q)$ -prosessi  $(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t$  on kääntyvä<sup>1</sup> ja  $AR(p)$ -prosessi voidaan esittää muodossa:

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L).$$

Oletetaan nyt, että AR-prosessin ominaisarvojen itseisarvot  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  ovat pienempiä kuin 1, silloin yhtälö (6) voidaan esittää muodossa:

$$u_t = \frac{1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q}{(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L)} \varepsilon_t \equiv \psi(L) \varepsilon_t, \quad (7)$$

jossa  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  ja yhtälön  $\psi(L) = 0$  juuret ovat yksikköympyrän ulkopuolella. Asetetaan  $\lambda_1 = 1$  ja  $|\lambda_j| < 1$  kaikilla  $j = 2, 3, \dots, p$ . Silloin yhtälölle (7) pätee

$$(1 - L)(1 - \lambda_2 L)(1 - \lambda_3 L) \dots (1 - \lambda_p L) u_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

ja erityisesti

$$(1 - L) u_t = \frac{1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q}{(1 - \lambda_2 L)(1 - \lambda_3 L) \dots (1 - \lambda_p L)} \varepsilon_t \equiv \psi(L) \varepsilon_t.$$

---

<sup>1</sup>  $MA(q)$ -prosessi on kääntyvä, kun yhtälön  $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q$  juuret ovat yksikköympyrän ulkopuolella eli  $\theta(z) \neq 0$ , kun  $|z| \leq 1$ .

Käyttäen edellä saatuja esityksiä ja viiveoperaattorin ominaisuuksia aikasarjan differenssin jälkeen nähdään, että yhtälö (5) voidaan nyt esittää muodossa

$$(1 - L) y_t = (1 - L) \mu + [\delta t - \delta (t - 1)] + (1 - L) u_t = 0 + \delta + \psi(L) \varepsilon_t,$$

mikä on yksikköjuuri prosessi varustettuna vakiokertoimella  $\delta$ .

Ensimmäisen differenssin jälkeen stationaariseksi muuttuva prosessi on  $ARIMA(p, 1, q)$ , mutta yleisesti prosessi on  $ARIMA(p, d, q)$ , kun  $(1 - L)^d y_t = \delta + \psi(L) \varepsilon_t$  on stationaarinen prosessi. Silloin sanotaan, että prosessi on integroitunut asteella  $d$ .  $d$ -luku siis kertoo kuinka monta kertaa prosessia  $\{y_t\}$  pitää differensoida, että se muuttuu stationaariseksi.

Yksikköjuuri prosessin tapauksessa sen differenssi  $\Delta y_t$  on stationaarinen prosessi, joten se voidaan ennustaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{y}_{t+s|t} &\equiv \hat{E}[(y_{t+s} - y_{t+s-1}) | y_t, y_{t-1}, \dots] \\ &= \delta + \psi_s \varepsilon_t + \psi_{s+1} \varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \varepsilon_{t-2} + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Muuttujan  $y$  arvo ajanhetkellä  $t + s$  on kaikkien sitä ja ajanhetken  $t$  välissä olevien erotusten (differenssien) summa:

$$\begin{aligned} y_{t+s} &= (y_{t+s} - y_{t+s-1}) + (y_{t+s-1} - y_{t+s-2}) + \dots + (y_{t+1} - y_t) + y_t \\ &= \Delta y_{t+s} + \Delta y_{t+s-1} + \dots + \Delta y_{t+1} + y_t, \end{aligned} \quad (9)$$

joten ottamalla ehdolliset arvot yhtälöstä (9) ja hyödyntämällä yhtälössä (8) saatua tulosta saadaan yksikköjuuri prosessin ennustuksen estimaattori

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+s|t} &= \Delta \hat{y}_{t+s|t} + \Delta \hat{y}_{t+s-1|t} + \dots + \Delta \hat{y}_{t+1|t} + y_t \\ &= \{\delta + \psi_s \varepsilon_t + \psi_{s+1} \varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \varepsilon_{t-2} + \dots\} \\ &\quad + \{\delta + \psi_{s-1} \varepsilon_t + \psi_s \varepsilon_{t-1} + \psi_{s+1} \varepsilon_{t-2} + \dots\} \\ &\quad + \{\delta + \psi_s \varepsilon_t + \psi_{s+1} \varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \varepsilon_{t-2} + \dots\} + \dots \\ &\quad + \{\delta + \psi_1 \varepsilon_t + \psi_2 \varepsilon_{t-1} + \psi_3 \varepsilon_{t-2} + \dots\} + y_t. \end{aligned} \quad (10)$$

Yhtälö (10) on täten yhtäpitävä seuraavan yhtälön kanssa:

$$\hat{y}_{t+s|t} = s\delta + y_t + (\psi_s + \psi_{s-1} + \dots + \psi_1) \varepsilon_t + (\psi_{s+1} + \psi_s + \dots + \psi_2) \varepsilon_{t-1} + \dots$$

Trendistationaarinen ja yksikköjuuri prosessi eroavat hyvin paljon ennustusvirheen va-

rianssin suhteen. Yksikköjuuriprosessin tapauksessa  $s$  periodia pitkä ennustusvirhe on

$$\begin{aligned}
y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t} &= \{ \Delta y_{t+s} + \Delta y_{t+s-1} + \cdots + \Delta y_{t+1} + y_t \} \\
&\quad - \{ \Delta \hat{y}_{t+s|t} + \Delta \hat{y}_{t+s-1|t} + \cdots + \Delta \hat{y}_{t+1|t} + y_t \} \\
&= \{ \varepsilon_{t+s} + \psi_1 \varepsilon_{t+s-1} + \psi_2 \varepsilon_{t+s-2} + \cdots + \psi_{s-1} \varepsilon_{t+1} \} \\
&\quad + \{ \varepsilon_{t+s-1} + \psi_1 \varepsilon_{t+s-2} + \psi_2 \varepsilon_{t+s-3} + \cdots + \psi_{s-2} \varepsilon_{t+1} \} + \{ \varepsilon_{t+1} \} \\
&= \varepsilon_{t+s} + \{1 + \psi_1\} \varepsilon_{t+s-1} + \{1 + \psi_1 + \psi_2\} \varepsilon_{t+s-2} + \cdots \\
&\quad + \{1 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_{s-1}\} \varepsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

ja keskineliövirhe on

$$E[y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t}]^2 = \{1 + (1 + \psi_1)^2 + (1 + \psi_1 + \psi_2)^2 + \cdots + (1 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_{s-1})^2\} \sigma^2.$$

Kuten nähdään yksikköjuuriprosessin keskineliövirhe kasvaa ennustusperiodien kasvaessa, eikä se suppene  $s$ :n kasvaessa, kuten käy trendistationaarisen prosessin kohdalla.

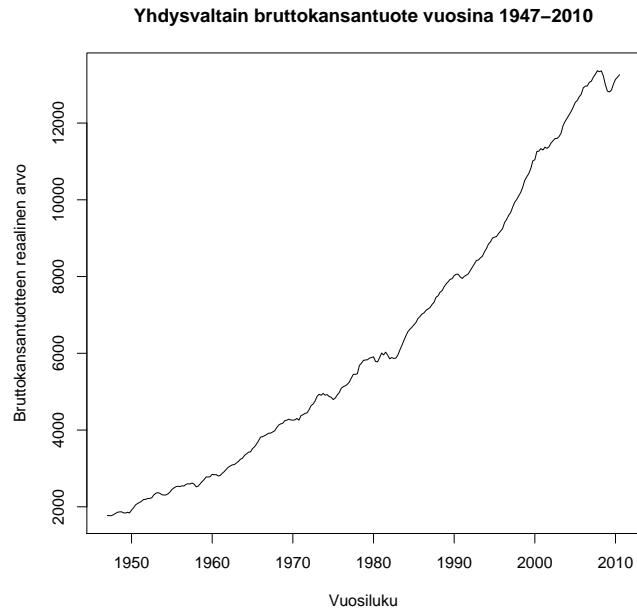
Eräs olennainen ero trendistationaarisen ja yksikköjuuriprosessin välillä on shokkien eli innovaatioiden vaikutus. Kuten aiemmin mainittu, shokeilla on pysyvä vaikutus yksikköjuuriprosessiin, kun taas trendistationaariselle aikasarjalle on ominaista palautuminen takaisin omalle trendille pitkällä aikavälillä. Yksikköjuuriprosessin impulssivaste on

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} + \psi_s + \psi_{s-1} + \cdots + \psi_1 = 1 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_s,$$

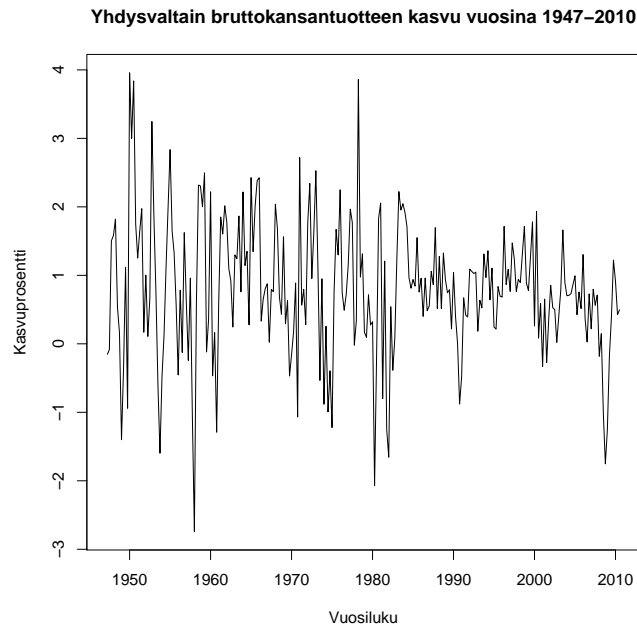
joten  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = 1 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots = \psi(1)$ . Yksikköjuuriprosessin differenssille taas pätee  $\frac{\partial \Delta y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = \psi_s$ .

Ennustamisen kannalta aikasarjan trendin takana oleva syy vaikuttaa vahvasti ennustuksen luottamusväleihin. Trendistationaarisen prosessin tapauksessa ennustuksen luottamusväli lähestyy vakiota kun ennustushorisontti kasvaa, mutta yksikköjuuriprosessin tapauksessa luottamusväli kasvaa, mitä pidemmälle yritetään arvoja ennustaa, koska sen ennustuksen estimaattori kasvaa rajatta ennustushorisontin kasvaessa, mikä käy ilmi yhtälöstä (10).

**Esimerkki 1.** Kuvassa 1 on esitetty vuosien 1947-2010 Yhdysvaltain bruttokansantuote. Kuvasta päätellen bruttokansantuote on ollut nousujohteinen eli trendimäinen. Kuvassa 2 on puolestaan esitetty saman aikasarjan ensimmäinen logaritmidifferenssi eli  $\Delta \log(y_t) = \log(y_t/y_{t-1}) = \log(y_t) - \log(y_{t-1})$ . Kuvat 1 ja 2 edustavat aineistoa, jolla on sama alkuperä. Kuvan 1 prosessi on kuitenkin epästationaarinen ja kuvan 2 prosessi vaikuttaa olevan stationaarinen ja sen arvo vaihtelee nollan ympärillä.



Kuva 1: USA:n bruttokansantuote vuosina 1947-2010



Kuva 2: USA:n bruttokansantuotteen kasvu vuosina 1947-2010

**Esimerkki 2.** (Hamilton, 1994) Jotta voidaan muuntaa epästationaarisen prosessin stationaariseksi, tulee suorittaa aivan erilaiset toimenpiteet deterministisen trendin ja yksiköjuuri-prosessin tapauksessa. Väärä toimenpide aiheuttaa ei-toivottuja seurauksia sarjalle. Sen takia trendin takana olevan prosessin ymmärtäminen on tärkeää, jos tavoitteena on stationaarinen aikasarja. Oletetaan, että me virheellisesti olettaisimme, että trendin takana olisi pelkkä deterministinen trendi, vaikka todellisuudessa kyseessä olisi satunnaiskulkua trenditekijän kanssa. Siinä tapauksessa stationaarisuuden aikaansaamiseksi luonnollisesti vähentäisimme  $\delta t$  tekijän kyseessä olevasta aikasarjasta:

$$y_t - \delta t = y_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t) \equiv y_0 + u_t.$$

Kuitenkin koska termin  $u_t$  varianssi on  $t\sigma^2$ , niin kyseessä ei ole stationaarinen sarja. Toisaalta jos yritetään ottaa differenssin trendistationaarista aikasarjasta, tuloksena on

$$\Delta y_t = \delta + (1 - L) \psi(L) \varepsilon_t,$$

joka on kylläkin stationaarinen *MA*-prosessi, mutta se ei ole kääntyvä. Ei-kääntyvän *MA*-prosessin estimaattoreiden jakauma ei ole tiedossa ja useimmat suurimman uskottavuuden estimaattoreiden ominaisuudet eivät sille päde (Hamilton, 1994).

# Luku 3

## Yksikköjuuritestit

Yksikköjuuritestien tarkoitus on tutkia aikasarjan stationaarisuutta ja paljastaa mahdollisen yksikköjuuri-prosessin olemassaolon sen takana. Tieto siitä johtuuko aikasarjan epästationaarisuus yksikköjuuresta vai siihen liittyvästä deterministisestä trendistä on hyvin tärkeä kysymys. Esimerkiksi makroekonomistit ovat kiinnostuneita siitä minkälaisia seurauksia lamalla on tulevaisuuden bruttokansantuotteeseen. Onko laman vaikutus pysyvä vai väliaikainen? Entä onko aikasarjat yhteisintegroituneita?<sup>1</sup>

Toisaalta kahden tai useamman epästationaarisen aikasarjan tapauksessa niiden keskinäinen regressio voi olla näyttää hyvältä huolimatta siitä, että kyseiset aikasarjat eivät liittyisi toisiinsa millään tavalla. Silloin voi olla kyseessä harhaanjohtava regressio ja sen tuloksena vääriä päätelmiä aikasarjojen suhteesta. Tieto aikasarjojen integroituvuudesta kuitenkin auttaa ymmärtämään onko näiden epästationaaristen aikasarjojen regressiolla ylipäättään mitään merkitystä.

Tässä luvussa esitellään kolmea hyvin yleisesti käytettyä yksikköjuuritestiä ja vertaan kahta niistä keskenään simuloidulla aineistolla. Näiden tilastollisten testien nollahypoteesi on aikasarjan integroituvuus asteella yksi ja vastahypoteesi on aikasarjan integroituvuus asteella nolla. Tämänäyttävien testien lisäksi on olemassa testejä, joiden nolla- ja vastahypoteesit ovat asetettuja toisin päin. Tämän jälkimmäisen tyyppin testejä sivuutetaan tässä työssä.

---

<sup>1</sup>Yhteisintegroituvuudella tarkoitetaan tilannetta, jolloin kahta tai useampaa aikasarjaa ohjaa sama stokastinen drift. Yhteisintegroituvuutta voidaan testata aikasarjojen ollessa integroituneita eri asteilla, mutta tieto integroitumisen asteesta on tärkeä, että osataan valita sopiva yhteisintegroituvuuden testi. Pesaran et al. (2001) esittävät yhteisintegroituvuuden testin muuttujille, jotka noudattavat  $I(0)$ - ja  $I(1)$ -prosessia ja esimerkiksi Johansen (1995) esittää yhteisintegroituvuuden ominaisuuksia  $I(2)$ -prosesseille.

### 3.1 Dickey-Fullerin ja laajennettu Dickey-Fullerin testi

Dickey-Fullerin testi perustuu vuonna 1979 julkaistuun Dickeyn ja Fullerin artikkeliin, joka on sittemmin muodostunut aikasarjatutkimuksen perustavanlaatuisiksi kulmakiveksi. Kyseinen testi soveltuu  $AR(1)$ -prosessia noudattavalle aikasarjalle:

$$y_t = \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

joka voidaan esittää myös seuraavalla tavalla

$$\Delta y_t = (\varphi - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t = \pi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (11)$$

Testin hypoteesiasetus on silloin:

$$H_0 : \varphi = 1 \quad \text{vastaan} \quad H_1 : \varphi < 1.$$

tai

$$H_0 : \pi = 0 \quad \text{vastaan} \quad H_1 : \pi < 0.$$

Dickey-Fullerin testi (lyh. DF-testi) perustuu t-testiin nollahypoteesille:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\varphi} - 1}{s.e.(\hat{\varphi})} = \frac{\hat{\pi}}{s.e.(\hat{\pi})},$$

jossa *s.e.* tarkoittaa regression kertoimen keskivirhettä (engl. standard error)<sup>2</sup>.

Regression (11) kertoimen estimaatti saadaan pienimmän neliösumman menetelmällä, mutta on tärkeää huomata, että Dickey-Fullerin testin kohdalla estimaattien tilastolliset arvot eivät noudata standardia t-jakaumaa. Dickey-Fullerin testin kohdalla  $\hat{\tau}$  noudattaa jakaumaa, jota useimmiten kutsutaan Dickey-Fullerin t-jakaumaksi.

Laajennettu Dickey-Fullerin testi (lyh. ADF-testi)(Dickey ja Fuller, 1979) on periaatteeltaan samanlainen kuin Dickey-Fullerin testi, mutta sitä voi käyttää  $AR(p)$ -mallin tapauksessa, kun  $p > 1$ . Jotta ADF-testiä voidaan käyttää, pitää  $AR(p)$ -malli saattaa erityiseen muotoon, jota muodostetaan seuraavaksi.

Oletetaan esimerkin vuoksi  $AR(3)$ -malli:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varphi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t.$$

---

<sup>2</sup>Muuttujan otosjakauman keskivirheen arvo saadaan kaavalla  $s/\sqrt{n}$ , jossa  $s$  on otosjakauman keskihajonta ja  $n$  on otosmäärä.



Kyseisen mallin ensimmäinen differenssi voidaan esittää seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
y_t - y_{t-1} &= (\varphi_1 - 1)y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varphi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t \\
&= (\varphi_1 - 1)y_{t-1} + (\varphi_2 + \varphi_3)y_{t-2} + \varphi_3(y_{t-3} - y_{t-2}) + \varepsilon_t \\
&= (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 1)y_{t-1} + (\varphi_2 + \varphi_3)(y_{t-2} - y_{t-1}) + \varphi_3(y_{t-3} - y_{t-2}) + \varepsilon_t \\
&= \pi y_{t-1} + c_1 \Delta y_{t-1} + c_2 \Delta y_{t-2} + \varepsilon_t = \Delta y_t,
\end{aligned}$$

jossa  $\pi = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 1) = -\varphi(1)$ ,  $c_1 = -(\varphi_2 + \varphi_3)$  ja  $c_2 = -\varphi_3$ . Tästä voimme iteroimalla päätellä edelleen, että vastaava ensimmäisen differenssin muoto  $AR(p)$ -mallille yleisesti on

$$\Delta y_t = \pi y_{t-1} + c_1 \Delta y_{t-1} + c_2 \Delta y_{t-2} + \dots + c_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t.$$

Nyt ADF-testin nollahypoteesi on  $\varphi(1) = 0$  eli

$$H_0 : \pi = 0 \text{ vastaan } H_1 : \pi < 0.$$

ADF-testin tapauksessa esimerkiksi Chang ja Park (2002) näyttävät, että aina kun yksikköjuuriprosessin autokovarianssille  $\gamma_{jt}$  pätee  $\sum_{j=0}^t |\gamma_{jt}| < \infty$  ja kun  $\{\varepsilon_t\}$ :lla on äärellinen neljäs momentti  $E(\varepsilon_t^4) < \infty$  kaikilla  $t$ , niin t-testin arvolle  $t_n$  pätee

$$t_n \Rightarrow \int_0^1 W(t) dW(t) / \left( \int_0^1 W^2(t) dt \right)^{1/2}, \quad (12)$$

jossa  $\{W(t), t \in [0, 1]\}$  on Wienerin prosessi alueessa  $[0, 1]$  ja  $t_n$ :n arvot silloin muodostavat niin sanotun Dickey-Fullerin jakauman.

Jos edellä esitettyyn  $AR(p)$ -prosessiin sisältyy deterministinen trendi, niin prosessi voidaan esittää muodossa

$$\Delta y_t = \pi y_{t-1} + \mu + \delta t + \sum_{j=1}^{p-1} c_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t,$$

jossa  $\delta t$  on deterministinen trendi ja  $\mu$  on vakiokerroin. Nyt Changin ja Parkin (2002) mukaan edellä esitetty ominaisuus (12) pätee edelleen tapaukseen, jolloin prosessi sisältää myös deterministisen trendin yksikköjuuren lisäksi.  $\pi$ :n pienimmän neliön estimaattorin  $\hat{\pi}_n$ :n jakauma on nyt sama kuin  $t_n$ :n jakauma, mutta prosessi  $W(t)$  muuttuu muotoon

$$\widehat{W}(t) = W(t) + (6t - 4) \int_0^1 W(s) ds - (12t - 6) \int_0^1 sW(s) ds.$$

Tämän ja edellä esitetyn  $t_n$  jakauman yhtälön todistuksen sivuutan tässä työssä niiden monimutkaisuuden takia.

## 3.2 Elliott-Rothenberg-Stockin testi

DeJong et al. (1992) näyttävät, että monien vakiintuneiden yksikköjuuritestien (joihin ADF testi ehdottomasti lukeutuu) voima<sup>3</sup> saattaa laskea huomattavasti, kun virhetermit ovat vahvasti korreloituneita. ADF-testin tapauksessa erityisesti tuntemattoman alkuarvon ja deterministisen trendin tapauksessa testin voima laskee huomattavasti (Elliott et al., 1996), mutta siihen on olemassa mahdollinen ratkaisu, jonka tarjoaa seuraavana esittelyssä oleva testi. Kyseinen testi pohjautuu Elliottin, Rothenbergin ja Stockin vuonna 1996 julkaisemaan artikkeliin. He kehittävät testin, joka kuuluu niin sanottuun tehokkaiden tai pisteoptimaalisten testien luokkaan. Se on Dickey-Fullerin t-testin muokattu versio, mutta artikkelin mukaan sen voima on huomattavasti parempi edellä mainituissa tapauksissa. Artikkelin Monte Carlon simulaatiot myös osoittavat, että muokattu testi toimii hyvin lyhyelläkin havaintohistorialla.

Useimmiten nykyinen tilastollinen ohjelmisto on varustettu Elliott-Rothenberg-Stockin testin (lyh. ERS-testi) kahdella tyypillä. Toinen, niin kutsuttu P-testi, testaa sitä onko prosessilla trendiä ja että sen odotusarvo on vakio. Toinen, niin kutsuttu DF-GLS-testi, testaa puolestaan itse yksikköjuurihypooteesia. DF-GLS testiä sovelletaan samalla tavalla kuin ADF-testiä, mutta ennen itse testiä havainnot muutetaan ei-trendimäiseen GLS-muotoon, joka on yleistetty pienimmän neliön muoto.

Oletetaan, että aineisto  $y_1, \dots, y_T$  on generoitu seuraavalla mallilla

$$y_t = d_t + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t,$$

jossa  $\{d_t\}$  on deterministinen komponentti ja  $\{\varepsilon_t\}$  on valkoinen kohina.

Oletetaan edelleen, että  $d_t = \beta' \mathbf{Z}_t$ , jossa  $\beta$  on  $q$ -ulotteinen tuntematon parametrivektori ja  $\mathbf{Z}_t$  ovat tunnettuja  $q$ -ulotteisia aineistovektoreita. Määritellään  $\mathbf{y}_\alpha$   $T$ -ulotteisena pystyvektorina ja  $\mathbf{Z}_\alpha$   $T \times q$  matriisina, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\alpha &= (y_1, y_2 - \alpha y_1, \dots, y_T - \alpha y_{T-1})', \\ \mathbf{Z}_\alpha &= (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 - \alpha \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_T - \alpha \mathbf{Z}_{T-1})'. \end{aligned}$$

Nyt  $\beta$ :n GLS-estimaattori on

$$\hat{\beta}_\alpha = \left( \mathbf{Z}'_\alpha \mathbf{Z}_\alpha \right)^{-1} \mathbf{Z}'_\alpha \mathbf{y}_\alpha$$

Tämän avulla saadaan ei-trendimäinen esitys aikasarjalle:

$$y_t^d = y_t - \hat{\beta}_\alpha' \mathbf{Z}_t,$$

---

<sup>3</sup>Kun  $H_0 \in \Omega_0$ , niin voimafunktio mittaa todennäköisyyttä, että nollahypoteesi hylätään, kun se ei pidä paikkaansa. Mitä suurempi on todennäköisyys, sitä parempi on testin voima (Esimerkiksi Nieminen ja Saikkonen, 2013.)

jossa  $\bar{\alpha} = 1 + \bar{c}/T$ ,  $\bar{c} \equiv T(\bar{\alpha} - 1)$ .  $\bar{\alpha}$  kuuluu valita niin, että testin voima on 50%.  $\bar{\alpha}$  riippuu paitsi termistä  $\bar{c}$ , myös  $\mathbf{Z}_t$ :n muodosta.<sup>4</sup>

Käyttäen edellä esitettyä ei-trendimäistä muotoa testattava malli saa muodon

$$\Delta y_t^d = \pi y_{t-1}^d + \sum_{j=1}^{p-1} c_j \Delta y_{t-j}^d + \varepsilon_t$$

ja sitä voi testata ADF-testin pienimmän neliösumman menetelmällä. Elliott et al. (1996) osoittavat, että DF-GLS-testillä on lähes samanlainen asymptoottinen jakauma kuin ADF:n t-testillä tapauksessa  $Z_t = 1$ , mutta sillä on parempi asymptoottinen voima vaihtoehtoista hypoteesia vastaan. Siinä tapauksessa, kun  $\mathbf{Z}_t = (1, t)$ , testin asymptoottinen jakauma on kuitenkin erilainen ja esimerkiksi Ng ja Perron (2001) laskevat kriittiset arvot jakaumalle tässä tapauksessa.

Elliott et al. (1996) osoittavat, että piste-optimaaliselle testille pätee

$$P_T = [S(\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}S(1)]/\hat{\sigma}_\varepsilon^2,$$

jossa  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  on  $\sigma_\varepsilon^2$ :n estimaattori,  $\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j})$  ja  $S(\alpha)$  on neliöityjen jäännöstermien summa  $\mathbf{y}_\alpha$ :n regressiosta, jossa  $\mathbf{Z}_\alpha$  on selittäjänä. Jos  $\boldsymbol{\beta}$  on puolestaan tunnettu, niin

$$S(\alpha) = (\mathbf{y}_\alpha - \mathbf{Z}_\alpha \boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y}_\alpha - \mathbf{Z}_\alpha \boldsymbol{\beta}).$$

Asetetaan seuraavat ehdot:

1. Prosessin alkuperäisellä virhetermillä  $u_0$  on jakauma, jolla on äärellinen toinen momentti kaikilla  $\alpha$  lähellä 1:ä
2.  $\{\varepsilon_t\}$  on stationaarinen prosessi odotusarvolla nolla ja se on ergodinen eli  $\gamma_k = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k})$  kaikilla  $k$
3.  $\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \neq 0 < \infty$
4.  $T^{-1/2} \sum_{t=1}^{\lfloor sT \rfloor} \varepsilon_t \implies \sigma_\varepsilon W_0(s)$ ,  $W_0(s) \sim N(0, s)$  on Brownin liike.

Nyt edellä asetettujen ehtojen ollessa voimassa Elliott et al. (1996) osoittavat, että

$$\begin{cases} P_T \implies \bar{c}^2 \int W_c^2 - \bar{c} W_c^2(1), & \text{kun aikasarjan odotusarvo on nolla tai vakio,} \\ P_T \implies \bar{c} \int V_c^2(t, \bar{c}) + (1 - \bar{c}) V_c^2(1, \bar{c}), & \text{kun aikasarjalla on lineaarinen trendi,} \end{cases}$$

jossa  $W_c(t) = \int_0^t \exp\{c(t-s)\} dW_0(s)$ , jolle pätee  $dW_c(t) = cW_c(t) dt + dW_0(t)$  ja  $\int W_c^2 \equiv \int_0^1 W_c^2(t) dt$ , jonka alkuarvo on  $W_c(0) = 0$  ja  $V_c(t, \bar{c}) = W_c(t) - t[\lambda W_c(1) + 3(1-\lambda) \int s W_c(s) ds]$ , jossa  $\lambda = (1 - \bar{c})/(1 - \bar{c} + \bar{c}^2/3)$ .

<sup>4</sup>Elliott et al. (1996) näyttävät esimerkiksi, että jos  $Z_t = 1$ , niin  $\bar{c} = -7$ . Kun puolestaan  $\mathbf{Z}_t = (1, t)$ , niin  $\bar{c} = -13, 5$ .

### 3.3 ADF-testin ja ERS-testin empiirinen vertailu

Yksikköjuuri-prosessin olemassaoloa ei kuitenkaan kannata yhdistää aikasarjan trendimäisyyteen, sillä pelkästään graafisen tarkastelun perusteella tekemät oletukset saattavat johtaa harhaan. Kahden seuraavan aikasarjan on tarkoitus esittää asiaa käytännössä.

Kuvassa 3 näkyy USA:n dollarin ja Iso-Britannian punnan vaihtokurssin kuukauden forward-korko<sup>5</sup> ajanjaksolla 1979-2001. Kyseisen ajanjakson korkojen todellinen keskiarvo on 0.0017. Kuvan perusteella ei kuitenkaan pysty toteamaan onko prosessi stationaarinen vai ei, erityisesti ennen vuotta 1995 vaihtelu on erittäin suurta. Aikasarjan autokorrelaatiotfunktio näkyy kuvassa 4. Kuvassa 5 näkyy puolestaan Ison-Britannian kuukausittainen inflaatio eli yleisen hintatason kasvunopeus vuosina 1988-2013 ja aikasarjan autokorrelaatiotfunktio näkyy kuvassa 6. Myöskään inflaation kohdalla aikasarja ei ole trendimäinen ja muutamaa poikkeusta lukuunottamatta saattaa aluksi vaikuttaa jopa stationaariselta.

Kumpikin prosessi on autokorreloitunut omalla tavalla. Vaihtokurssin koron autokorrelaatio on sitkeä ja se ylittää 95%:n luottamusvälin jopa 30:lla viiveellä. Inflaation autokorrelaatiolla on puolestaan syklistä käyttäytymistä kuudennen ja kahdennentoista viipeen kohdalla. Taulukko 2 näyttää yksikköjuuritestien tuloksia vaihtokurssin korolle ja taulukossa 4 puolestaan näkyy inflaation yksikköjuuritestien tuloksia. Schwarz-kriteerin (SC)<sup>6</sup> valitsemalla viivetasolla, joka on nolla, kumpikin testi hylkää yksikköjuurihypoteesin 99%:n tasolla vaihtokurssin koron kohdalla. Tätä tukee myös DF-GLS:n pisteoptimaalinen testi, joka hylkää yksikköjuurihypoteesin 99%:n tasolla (taulukko 1). Kumpikin testi kuitenkin kallistuu yksikköjuuren suuntaan, kun viipeitä lisätään. Viipeen valitsemisen pitäisi kuitenkin aina perustua teoriaan tai harkittuun analyysiin, sillä valittu viive voi vaikuttaa testin lopputulokseen. Vaihtokurssin koron kohdalla ollaan yleisesti sillä linjalla, että kuukausihavainnot ovat riippumattomia eikä aikasarjassa ole myöskään syklejä autokorrelaation perusteella, joten yksi viive voi olla perusteltu valinta tässä tapauksissa (Schwarz-kriteerilla saadaan myös yksi viive).

Inflaation kohdalla sekä ADF-, että DF-GLS-testin arvot kasvavat sitä enemmän, mitä enemmän viipeitä malliin sisällytetään. Yleensä ottaen kumpikin testi kuitenkin tuottaa lähellä toista testiä olevia arvoja, joskin DF-GLS kallistuu enemmän yksikköjuuren suuntaan. Schwarz-kriteerin perusteella optimaalinen viipeiden määrä on 12, mitä tukee myös aikasarjan autokorrelaatiotfunktio. Tällä viivetasolla kumpikin testi hyväksyy yksikköjuurihypoteesin. Tätä tulosta tukee myös monen ekonomistin näkemys inflaatiosta, vaikka inflaation integroitumisaste saattaa riippua myös aikavälistä (Halunga et al., 2009).

---

<sup>5</sup>Forward-korko saadaan kaavalla  $\log(s) - \log(f)$ , jossa  $s$  on nykyhetken vaihtokurssi (spot) ja  $f$  on vaihtokurssi, jolla kaupan osapuolet sopivat vaihtamaan valuutan tietyn ajan kuluttua (forward), tässä tapauksessa kuukauden eli 30 päivän päästä.

<sup>6</sup>Schwarz-kriteeri perustuu mallin uskottavuusfunktioon ja se on määritelty:  $SC = -2 \ln(\hat{L}) + k \ln(n)$ , jossa  $\hat{L}$  on mallin uskottavuusfunktio,  $k$  on parametrien lukumäärä ja  $n$  on havaintojen lukumäärä.

### 3.3.1 Yksikköjuuritestit ja simuloitut aikasarjat

Edellisessä jaksossa nähtiin, että vertailussa olevien yksikköjuuritestien välillä ei ollut merkittävää eroa. Seuraavaksi on tarkoitus tutkia mahdollisia eroja simuloitujen aikasarjojen kohdalla. Nämä prosessit ovat luotuja käyttäen joko satunnaiskulkua ja trenditekijää tai trenditekijää yksinään. Kumpikin prosessityyppi toistetaan havaintomäärillä  $N=25$ ,  $N=100$  ja  $N=1000$  sekä käyttäen toisista poikkeavia trenditekijöitä. Simuloitut aikasarjat ovat:

1.  $y_t = -\log(t/10) + y_{t-1} + \varepsilon_t; \varepsilon_t \sim N(0, 1)$
2.  $y_t = \log(t) + \varepsilon_t; \varepsilon_t \sim N(0, 1)$
3.  $y_t = t/500 + y_{t-1} + \varepsilon_t; \varepsilon_t \sim N(0, 1)$
4.  $y_t = t/30 + \varepsilon_t; \varepsilon_t \sim N(0, 1)$
5.  $y_t = -(t/100000) + y_{t-1} + \varepsilon_t; \varepsilon_t \sim N(0, 1)$
6.  $y_t = \log(t) + y_{t-1} + \varepsilon_t; \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

Kyseisten aikasarjojen esitys on nähtävissä kuvissa 7- 12 ja testien tulokset puolestaan taulukossa 5. Vertailemalla testien arvoja kriittisiin arvoihin (taulukko 6) nähdään, että kumpikin testi onnistuu hylkäämään yksikköjuuren aina, kun sitä ei ole. Samoin kumpikin testi onnistuu hyväksymään yksikköjuuren oikein kaikissa kolmessa tapauksessa<sup>7</sup>.

Tulosten perusteella ei voi sanoa, että DF-GLS-testi olisi ylivoimainen ADF-testiin verrattuna, sillä ADF-testi onnistuu esimerkiksi hylkäämään yksikköjuuren vahvemmin luvuin joissain tapauksissa. Esimerkiksi kuudennen aikasarjan kohdalla ADF-testin arvo on -18.5028, kun DF-GLS-testin arvon on vain -5.5989, samoin kolmannen aikasarjan kohdalla ADF-testi hyväksyy yksikköjuuren arvolla -0.8645, joka on isompi kuin DF-GLS:n vastaava -1.0486. Tuloksia ei kuitenkaan voi yleistää muutaman simulaation perusteella, sillä kyseessä voi olla sattuma.

Testien perusteellisempi vertailu vaatisi lisäksi syvällisempiä menetelmiä, kuten Monte-Carlo-simulaatio esimerkiksi. Testin asetuksia, kuten trendin sisällyttäminen ei voi myöskään olla ohittamatta, ja joskus saman testin tekeminen eri asetuksilla tuottaa päinvastaisia tuloksia. Tässä tapauksessa katsoin kuitenkin tarpeelliseksi sisällyttää trendin, sillä tiesin muutenkin sen olevan mukana prosessien määrittelyn perusteella. Yhtä kaikki, ottaen huomioon myös vaihtokurssin koron ja inflaation testituloksia, ADF-testi näyttää pärjäävän suhteellisen hyvin DF-GLS-testiin verrattuna.

---

<sup>7</sup>Elliott et al. (1996) tarjoavat kriittisiä arvoja ainostaan otoksille, joiden määrä on 50 tai isompi, joten DF-GLS-testin ja otoskoon 25 kohdalla on noudettava pientä varovaisuutta.

# Luku 4

## Johtopäätökset

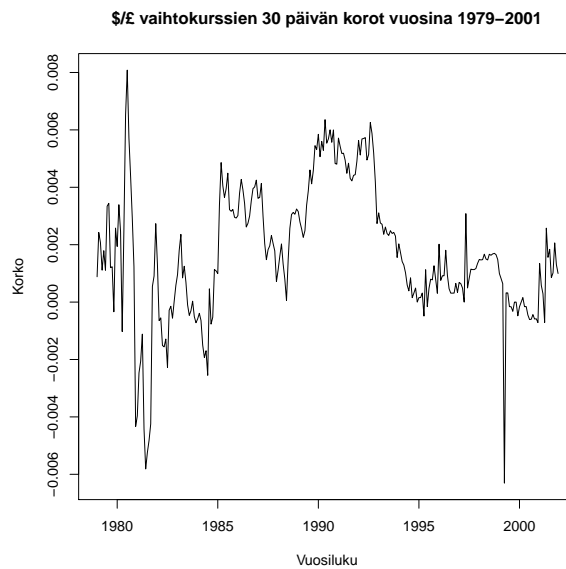
Yksikköjuuritilastotiede ja erityisesti yksikköjuuriekonometria on kehittynyt vahvasti 1980-luvun alusta alkaen. Tietokanta *Scencedirect* tuottaa hakusanoilla "unit root" 45 tulosta ja hakusanoilla "time series forecasting" 23 tulosta pelkästään vuoden 2012-2013 artikkeleille. Aihetta tutkitaan sekä tilastotieteen puolella, että muissa aineissa, mutta erityisesti kansantaloustieteessä. Tilastotieteen puolella aihetta tutkitaan erityisesti testien asymptotiikan ja voiman kannalta, mutta kansantaloustieteilijät ovat enimmäkseen kiinnostuneita tutkimaan yksikköjuuritestejä shokkien, ennustamisen kannalta ja yhteisintegroituvuuden kannalta. Molemmat ammattiryhmät ovat kuitenkin yleisesti kiinnostuneita yksikköjuuritestien laadun ja voiman parantamisesta.

Yksikköjuuriekonometria kehittyi edelleen vahvasti. Yksikköjuuritilastotieteellä yleensä ottaen on kuitenkin sovelluksia muiltakin aloilta kuin kansantaloustieteestä. Fysiikassa, meteorologiassa ja tähtitieteessä on olemassa monia prosesseja, joilla on epästationaarista käyttäytymistä. Esimerkiksi ilmaston ja veden globaalin lämpötilan aikasarjoilla on trendimäistä käytöstä.

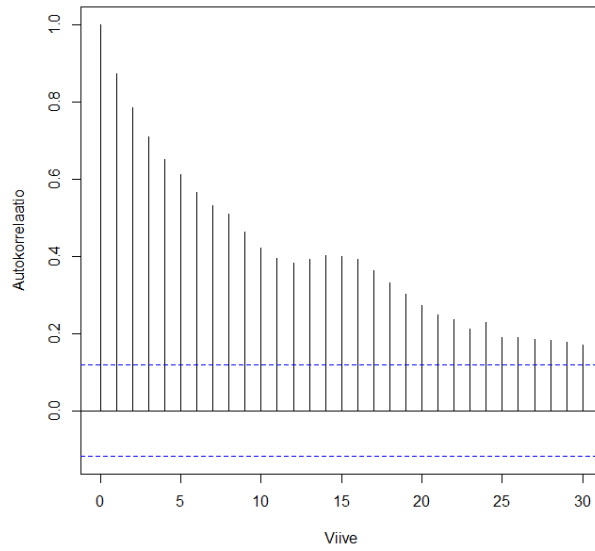
Kuten trendistationaarisen ja yksikköjuuriprosessin vertailusta käy ilmi, trendin takana olevan prosessin tunteminen on tärkeä asia, jos halutaan ennustaa ja tutkia epästationaarista aikasarjaa. Tässä työssä esitetyt testit tarjoavat hyvää pohjaa tällaiselle tutkimukselle. Yksikköjuuritestien heikko puoli on kuitenkin niiden luotettavuus, sillä kuten kaikki tilastolliset testit niihin ei voi luottaa sokeasti. Ne myös perustuvat lineaarisiin ja aikainvariantteihin malleihin, mikä joskus hankaloittaa tulkintaa, jos aikasarjassa on rakenteellisia poikkeamia.

Aikasarja-analyysillä on positiiviset näkymät erityisesti ennustuksissa, joita pystytään laatimaan yhä tarkemmin parantuneen laskentatehon ja teoreettisten mallien avulla. Se yksi on tilastotieteen aloja, jotka vaativat vielä tulevaisuudessakin teoreettista tutkimusta erityisesti epä säännöllisten aikasarjojen kohdalla, joita esiintyy esimerkiksi kansantaloustieteessä talouskriisien seurauksena.

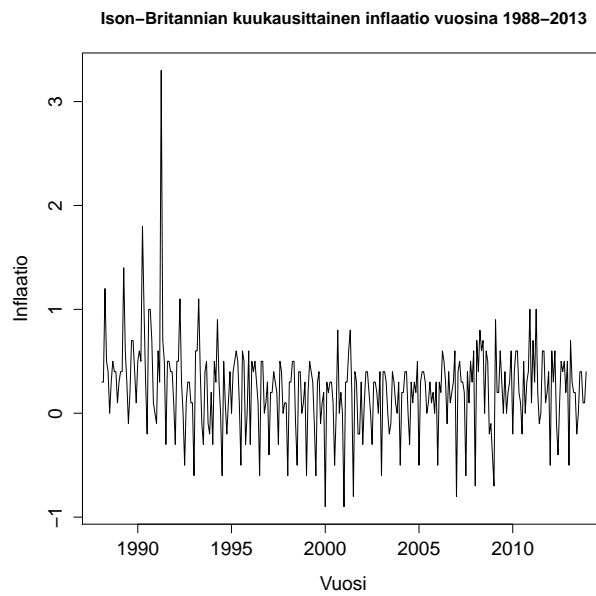
# Liitteet



Kuva 3: USA:n dollarin ja Ison-Britannian punnan vaihtokurssin korko vuosina 1979-2001

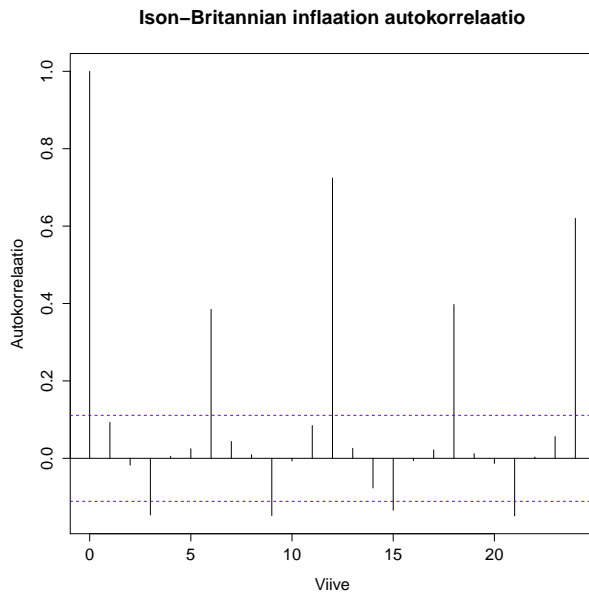


Kuva 4: Vaihtokurssin koron autokorrelaatiofunktio



Kuva 5: Ison-Britannian kuukausittainen inflaatio vuosina 1988-2013





Kuva 6: Ison-Britannian inflaation autokorrelaatiofunktio

Muuttuja: valuuttakorko (N=276)

Elliott-Rothenberg-Stock, P-testi 0.8244 (viive: 0 (SC))

Kriittiset arvot

$\alpha = 0.01$  1.94

$\alpha = 0.05$  3.20

Taulukko 1: ERS-P-testi valuuttakorolle

Viive	Testit (alkuarvo, ei trendiä)	
	ADF	DF-GLS
<b>0</b>	-4.3068	-4.1138
<b>(SC) 1</b>	-3.7545	-3.6018
<b>2</b>	-3.5664	-3.4135
<b>3</b>	-3.3164	-3.1542
<b>4</b>	-2.9941	-2.8543
<b>5</b>	-2.9951	-2.8416
<b>6</b>	-2.8238	-2.7116
<b>10</b>	-2.6298	-2.4506
<b>15</b>	-1.9642	-1.8092
<b>20</b>	-2.2977	-2.2291
<b>25</b>	-1.8982	-1.6148
<b>30</b>	-2.3466	-1.8204
Kriittiset arvot		
$\alpha=0.01$	-3.44	-2.57
$\alpha=0.05$	-2.87	-1.94

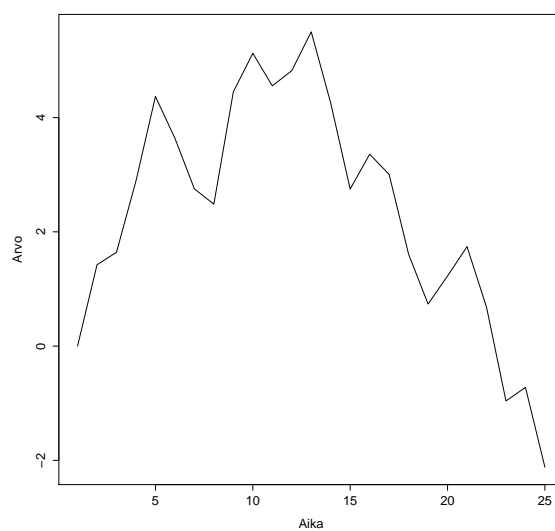
Taulukko 2: Vaihtokurssin koron yksikköjuuritestit

Muuttuja: Ison-Britannian inflaatio (N=311)	
Elliott-Rothenberg-Stock, P-testi	20.7028 (viive: 12 (SC))
Kriittiset arvot	
$\alpha = 0.01$	1.95
$\alpha = 0.05$	3.22

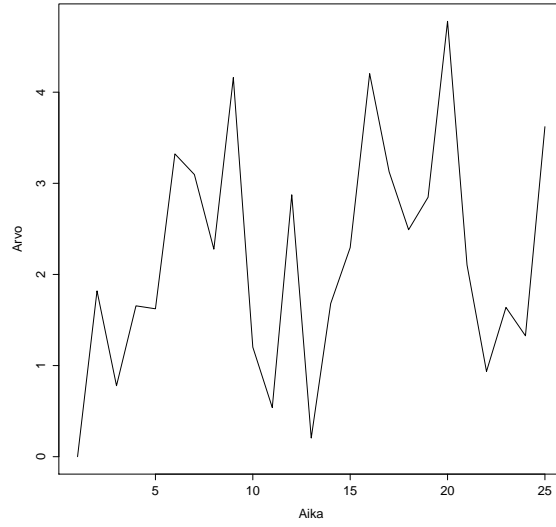
Taulukko 3: ERS-P-testi inflaatiolle

Testit (alkuarvo, ei trendiä)		
Viive	ADF	DF-GLS
<b>0</b>	-15.9865	-15.7315
<b>1</b>	-12.0992	-11.8073
<b>2</b>	-11.5847	-11.1415
<b>3</b>	-9.3477	-8.8812
<b>4</b>	-8.0987	-7.6039
<b>5</b>	-4.9553	-4.6090
<b>10</b>	-3.9285	-3.5601
<b>(SC) 12</b>	-2.0653	-1.7302
<b>15</b>	-2.3511	-1.9337
<b>20</b>	-2.2769	-1.8196
<b>25</b>	-2.1066	-1.5590
<b>30</b>	-3.2399	-2.2876
Kriittiset arvot		
$\alpha=0.01$	-3.44	-2.57
$\alpha=0.05$	-2.87	-1.94

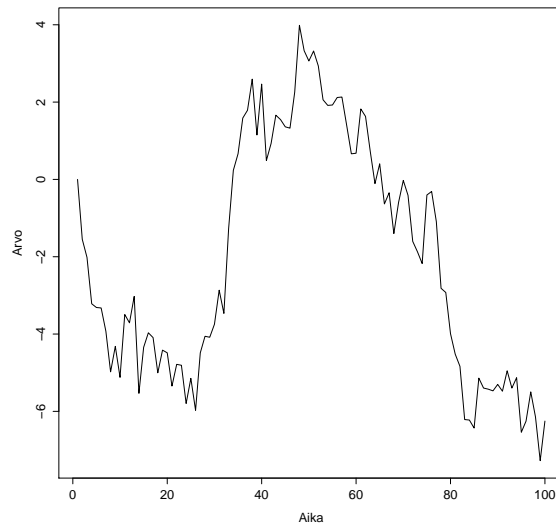
Taulukko 4: Inflaation yksikköjuuritestit



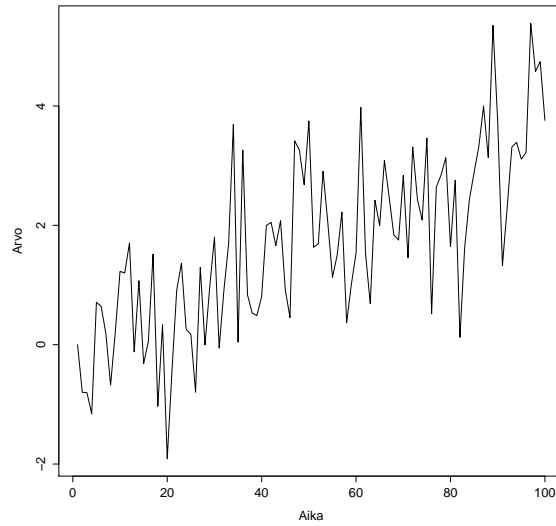
Kuva 7: Simuloitu aikasarja, satunnaiskulku ja aikatrendi (T=25)



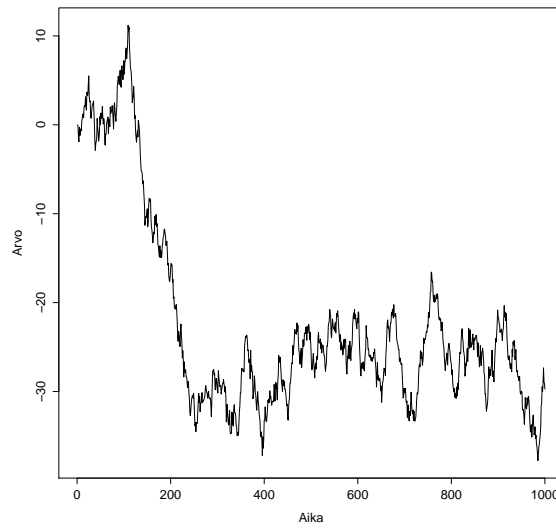
Kuva 8: Simuloitu aikasarja, aikatrendi ( $T=25$ )



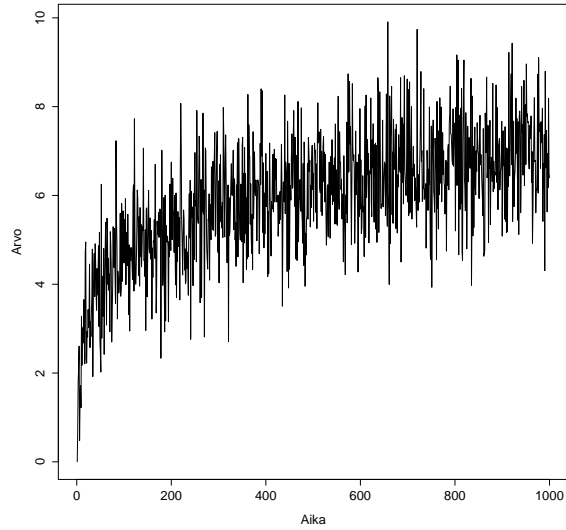
Kuva 9: Simuloitu aikasarja, satunnaiskulku ja aikatrendi ( $T=100$ )



Kuva 10: Simuloitu aikasarja, aikatrendi ( $T=100$ )



Kuva 11: Simuloitu aikasarja, satunnaiskulku ja aikatrendi ( $T=1000$ )



Kuva 12: Simuloitu aikasarja, aikatrendi (T=1000)

Simuloitu aikasarja	Arvojen lkm	Viive (SC)	Alkuarvo ja trendi	
			ADF	DF-GLS
$y_t = -\log(t/10) + y_{t-1} + \varepsilon_t$	25	1	-1.5594	-1.3388
$y_t = \log(t) + \varepsilon_t$	25	1	-2.9644	-2.8967
$y_t = t/500 + y_{t-1} + \varepsilon_t$	100	1	-0.8645	-1.0486
$y_t = t/30 + \varepsilon_t$	100	1	-6.0363	-6.0823
$y_t = -(t/100000) + y_{t-1} + \varepsilon_t$	1000	1	-1.9111	-1.4111
$y_t = \log(t) + y_{t-1} + \varepsilon_t$	1000	1	-18.5028	-5.5989

Taulukko 5: Simuloitujen aikasarjojen testitulokset

Testi	Arvojen lkm	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$
ADF	25	-4.38	-3.60
ADF	100	-4.04	-3.45
ADF	$\infty$	-3.96	-3.41
DF-GLS	50	-3.77	-3.19
DF-GLS	100	-3.58	-3.03
DF-GLS	$\infty$	-3.48	-2.89

Taulukko 6: Kriittiset arvot

# Kirjallisuutta

- [1] Chang Y., Park J.Y. (2002): "On the Asymptotics of ADF Tests for Unit Roots", *Econometric Reviews*, 21, 431-447.
- [2] Dickey D.A., Fuller W.A. (1979): "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- [3] Elliott G., Rothenberg T.J. ja Stock J.H. (1996): "Efficient tests for an autoregressive unit root", *Econometrica*, 64/4, 813-836.
- [4] Johansen S. (1995): "A Statistical Analysis of Cointegration for I(2) Variables", *Econometric Theory*, 11/1, 25-59.
- [5] Halunga A.G., Osborn D.R., Sensier M. (2009): "Changes in the order of integration of US and UK inflation", *Economics Letters*, 102/1, 30-32.
- [6] Hamilton J.D. (1994): "Time series analysis", *Princeton University Press*.
- [7] Nieminen P., Saikkonen P. (2013): "Tilastollisen päättelyn kurssi", *Helsingin yliopisto*
- [8] Ng S. ja Perron P. (2001): "Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power", *Econometrica*, 69, 1519-1554.
- [9] Pesaran M.H., Shin Y., Smith R.J.(2001): "Bounds testing approaches to the analysis of level relationships", *Journal of Applied Econometrics*, 16, 289-326.
- [10] Plosser C.I. ja Schwert G.W. (1977): "Estimation of a non-invertible moving average process", *Journal of Econometrics*, 6, 199-224.